

**MATEMATICA PER LA SCUOLA PRIMARIA  
ED EVIDENZE DI EFFICACIA**

---

- Quanto i programmi di matematica sono efficaci nella scuola primaria?
- Quali fattori contribuiscono a rendere programmi di matematica più efficaci?

Nei paesi anglosassoni i programmi sono metodi didattici prodotti da Università o case editrici e diffusi nelle scuole. Essi sono strutturati secondo tempi e frequenza di attuazione, contengono strumenti e materiali didattici e le casi produttrici forniscono talvolta la formazione per gli insegnanti al programma.

---

*AERA Open*

*January-December 2021, Vol. 7, No. 1, pp. 1–29*

*DOI: 10.1177/2332858420986211*

*Article reuse guidelines: [sagepub.com/journals-permissions](http://sagepub.com/journals-permissions)*

*© The Author(s) 2021. <http://journals.sagepub.com/home/ero>*

## Effective Programs in Elementary Mathematics: A Meta-Analysis

**Marta Pellegrini** 

*University of Florence*

**Cynthia Lake**

**Amanda Neitzel** 

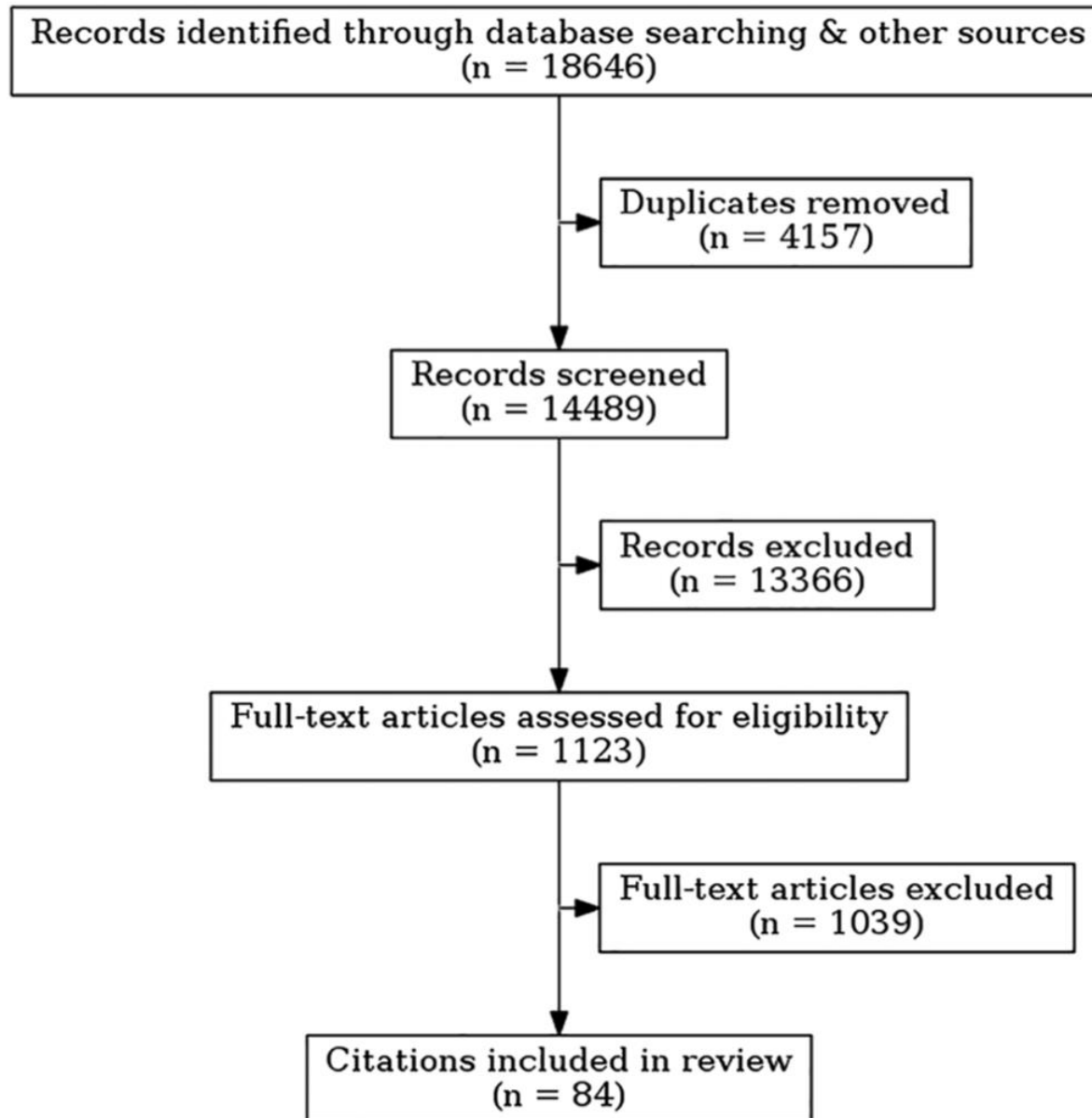
**Robert E. Slavin**

*Johns Hopkins University*

*This article reviews research on the achievement outcomes of elementary mathematics programs; 87 rigorous experimental studies evaluated 66 programs in grades K–5. Programs were organized in six categories. Particularly positive outcomes were found for tutoring programs (effect size [ES] = +0.20,  $k = 22$ ). Positive outcomes were also seen in studies focused on professional development for classroom organization and management (e.g., cooperative learning;  $ES = +0.19$ ,  $k = 7$ ). Professional development approaches focused on helping teachers gain in understanding of mathematics content and pedagogy had little impact on student achievement. Professional development intended to help in the adoption of new curricula had a small but significant impact for traditional (nondigital) curricula ( $ES = +0.12$ ,  $k = 7$ ), but not for digital curricula. Traditional and digital curricula with limited professional development, as well as benchmark assessment programs, found few positive effects.*

Tipologia di studi inclusi nella meta-analisi:

- Studi sperimentali che hanno valutato programmi di matematica su abilità e conoscenze matematiche
  - Studenti in K-5
  - Intervento di almeno 12 settimane condotti da insegnanti
-



## Categorie di programmi

- **Tutoring:** programma con frequenza settimanale di istruzione da parte dell'insegnante/educatore con un solo bambino o a piccolo gruppo (4-5 bambini). Di solito utilizzato con bambini con scarso rendimento o difficoltà
  - **Programmi di formazione degli insegnanti all'uso di strategie di gestione della classe:** programmi che forniscono agli insegnanti formazione e materiali per aiutarli a implementare innovazioni nell'organizzazione e nella gestione della classe, come l'apprendimento cooperativo, gestione del comportamento.
  - **Curricolo:** programmi basati su un libro di testo da utilizzare tutto l'anno scolastico con altri materiali per le lezioni.
  - **Programmi con sostanziale uso della tecnologia:** programmi che impiegano nei vari momenti della lezione piattaforme tecnologiche
-

## Che cosa è più efficace in matematica?

- 1. Tutoraggio da parte di un adulto** è la strategia più efficace grazie alla personalizzazione dei contenuti e delle modalità che va incontro ai bisogni dei bambini (ES = +0.20)
    1. Tutoring a piccoli gruppi (ES = +0.30) è più efficace di quello individuale (ES = +0.19)
  - 2. Formazione a insegnanti per gestione della classe/strategie cooperative** è efficace e sono ottime strategie da utilizzare con l'intera classe (ES = +0.19). La formazione degli insegnanti è efficace quando è focalizzato su qualcosa di concreto replicabile in classe e non su conoscenze pedagogiche e didattiche generiche.
  - 3. Curricula con formazione degli insegnanti** sono programmi con una modesta efficacia (ES = +0.12) ma alcuni si contraddistinguono per una maggiore efficacia perché utilizzano modellamento, problem solving, etc.
-

Che cosa NON è efficace in matematica?

- 1. Programmi con sostanziale uso della tecnologia**, nonostante le alte aspettative di ricercatori e insegnanti sull'efficacia della tecnologia per la matematica essa non risulta essere una componente sostanziale per migliorare i risultati di apprendimento (ES = +0.04).
  - 2. Curricula che non forniscono formazione agli insegnanti per il loro utilizzo** (ES = +0.04).
-



Che cosa si sa dell'efficacia del metodo Singapore?

- Inclusi nella meta-analisi studi sull'adattamento statunitense del Singapore Math chiamato Math in Focus
- Curriculum dotato di libro di testo e altri materiali
- È prevista la formazione degli insegnanti (circa 15-20 ore) all'uso del programma e materiale per l'insegnante per la pianificazione delle lezioni
- Caratteristiche: utilizzo della manipolazione di oggetti e della visualizzazione grafica per risolvere problemi matematici; strategie molto utilizzate: modellamento dell'insegnante, problem solving.

## Che cosa si sa dell'efficacia del metodo Singapore?

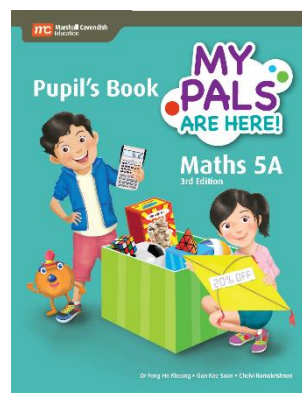
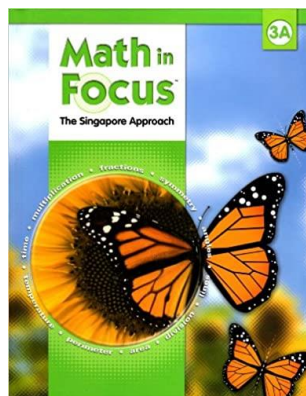
Study	Design	Duration	Sample size	Grade	Sample characteristics	Posttest	Effect size	Study effect size
Math in Focus Educational Research Institute of America (2010)	QE	1 Year	678 Students (125E, 553C)	4	Program mean: +0.24* NJ. 15% FRL, 30% minority, 12% SPED	NJ ASK		+0.25*
Educational Research Institute of America (2013)	CQE	1 Year	33 Classes, 679 students (362E, 317C)	3	59% minority, 58% FRL, 9% ELL	ITBS		+0.29
Jaciw et al. (2016)	CR	1 Year	18 Teams, 1,641 students (857E, 784C)	3-5	Clark County, NV; 47% H, 10% AA, 56% FRL, 11% SPED	SAT10-Probl. Solv SAT10-Procedures Nevada CRT	+0.12* +0.14* +0.05	+0.10

- Il programma della categoria curricula più efficace (ES = +0.24)

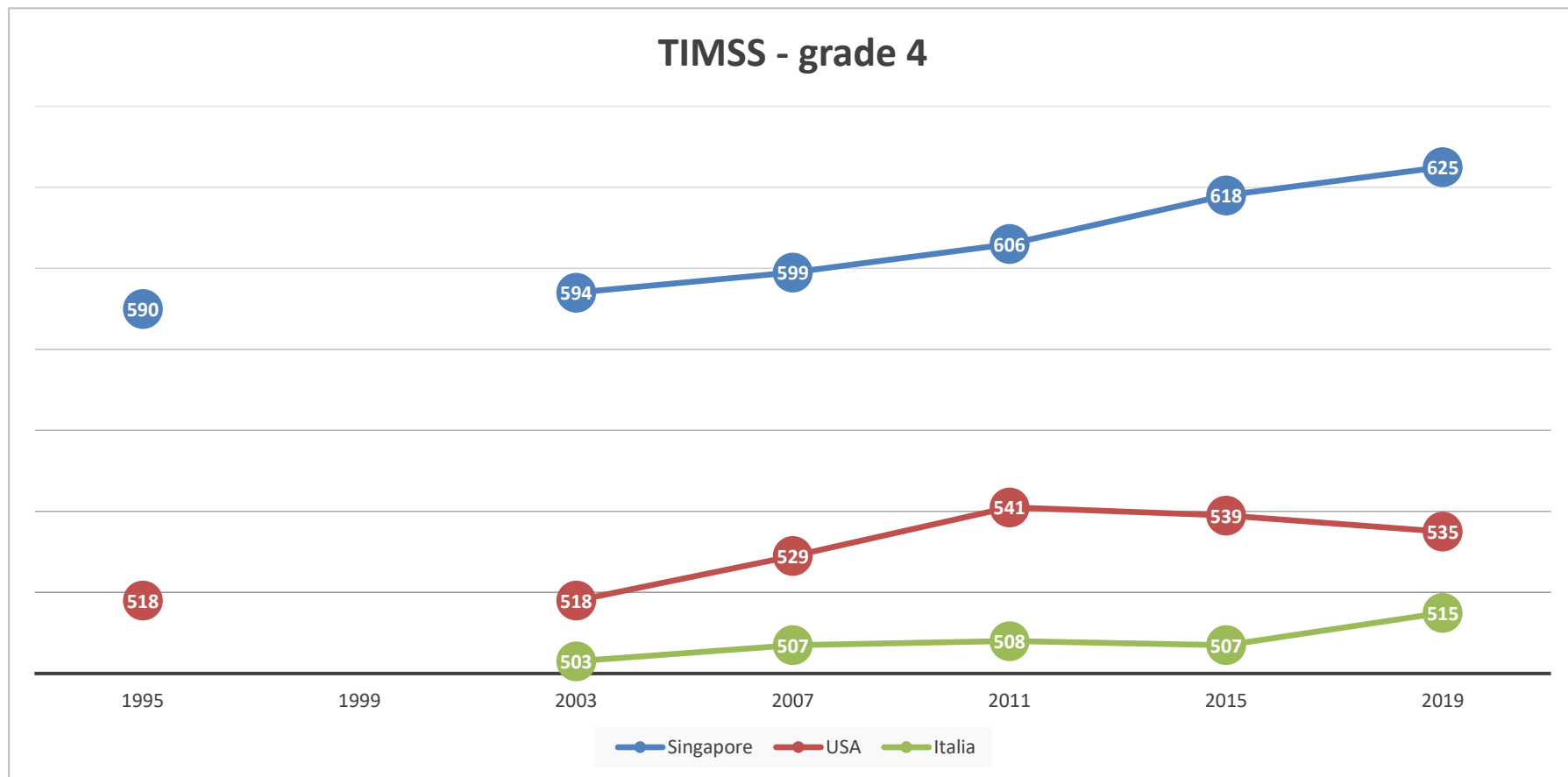
## **IL METODO SINGAPORE E LE SUE CARATTERISTICHE**

---

- Math in Focus è l'adattamento statunitense del Singapore Math curriculum (My Pals are here)
- Condividono: scopo, sequenza e principi didattici
- L'adattamento statunitense prevede inoltre:
  - valutazioni più frequenti (sia formative che sommative)
  - guide per gli insegnanti
  - componenti tecnologiche
  - risorse differenziate per il potenziamento e il recupero



## Le ragioni dell'interesse verso l'approccio Singapore Math



### Le ragioni del successo

- Prima degli anni '80 tutti i libri di testo di matematica a Singapore venivano importati da altri paesi
  - A partire dagli anni '80, il Ministero dell'Educatione (MOE), ha avviato una revisione del curriculum matematico tramite la predisposizione di un percorso ben definito dalla scuola primaria alla scuola secondaria incentrato sul problem solving (Wong, 2009).
-

### Finalità ed obiettivi del Singapore Math Approach

L'obiettivo principale del programma è consentire agli studenti di diventare risolutori strategici di problemi matematici e perseverare nella loro risoluzione.

- Dare un senso ai problemi e perseverare nel risolverli
  - Ragionare in modo astratto e quantitativo
  - Costruire argomenti validi e giudicare il ragionamento degli altri
  - Modellare con la matematica
  - Utilizzare strategicamente gli strumenti appropriati
  - Prestare attenzione alla precisione
  - Individuare e utilizzare la struttura
  - Cercare ed esprimere regolarità nei ragionamenti ripetuti
-

## Caratteristiche

Framework

Organizzazione dei contenuti

Libri di testo

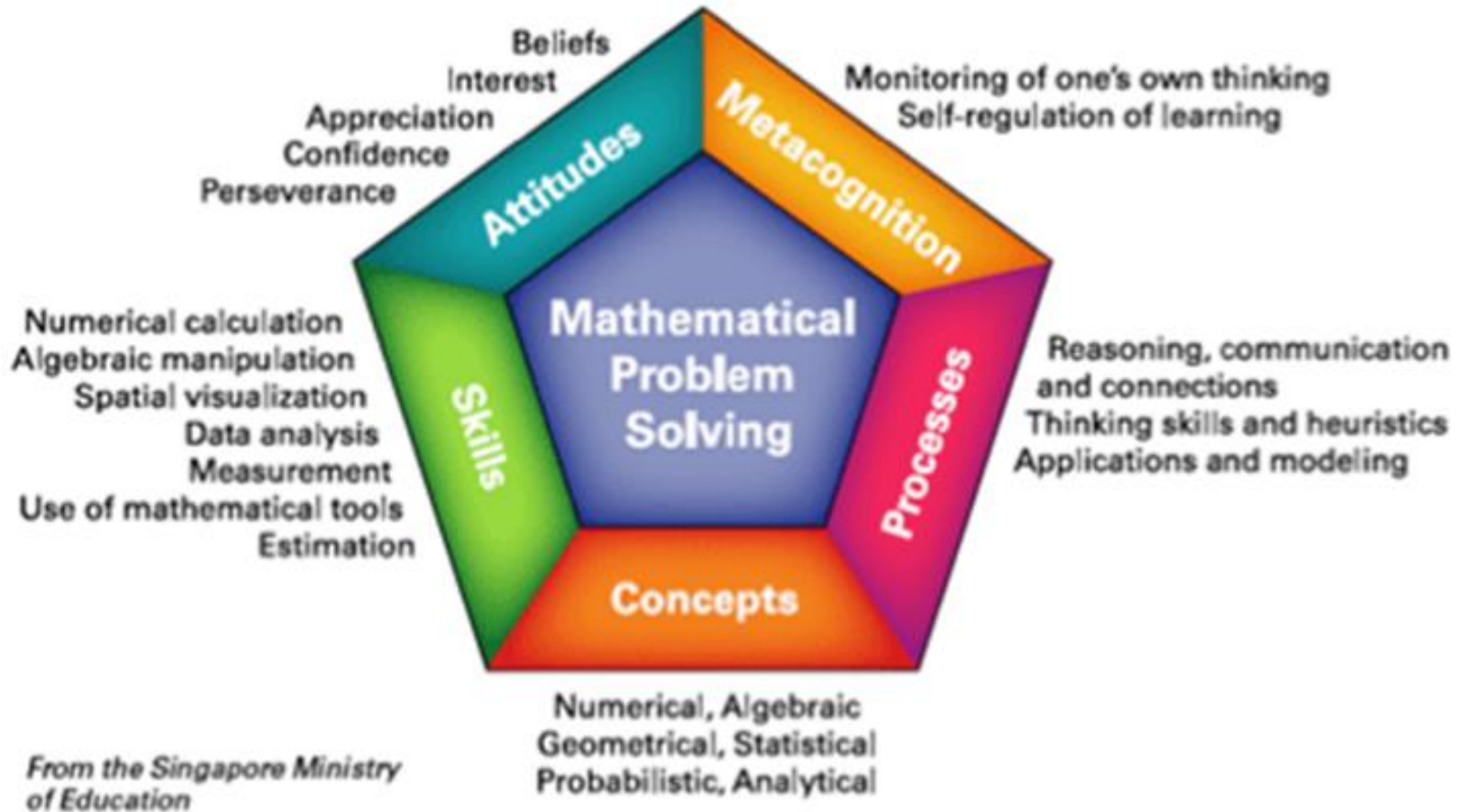
Istruzione guidata e sistematica

CPA (Concrete to Pictorial to Abstract) Approach

---



## Il Pentagon Framework



## Organizzazione dei contenuti

- i numeri interi
- le frazioni
- i decimali
- le percentuali
- le proporzioni
- il denaro
- le misure e la misurazione
- i grafici statistici
- la geometria
- tessellation
- velocità
- algebraic substitution
- Sviluppati in modo logico e sequenziale (*Progressione*)
- I nuovi argomenti si basano su contenuti matematici precedenti man mano che gli studenti avanzano nel loro percorso scolastico
- *Focus* su un numero ristretto di argomenti (es. 15 Singapore Vs 50 USA, in Leinwand & Ginsburg, 2007)  
>> «teaching for mastery»

*La probabilità non è un contenuto affrontato nella scuola primaria.*

---

## Exhibit 3–5. Singapore Topic Matrix for Numbers—Primary 1 to 4 and Primary 5 and 6 (Normal Track)

P1	P2	P3	P4	P5	P6
<b>NUMBERS: WHOLE NUMBERS</b>					
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Number notation and place values up to 100</li> <li>2. Cardinal and ordinal numbers</li> <li>3. Comparing and ordering</li> <li>4. Addition and subtraction of numbers within 100</li> <li>5. Multiplication of numbers whose product is not greater than 40</li> <li>6. Division of numbers not greater than 20</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Number notation and place values up to 1,000</li> <li>2. Addition and subtraction of numbers up to 3 digits</li> <li>3. Multiplication and division within the 2, 3, 4, 5, and 10 times tables</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Number notation and place values up to 10,000</li> <li>2. Addition and subtraction of numbers up to 4 digits</li> <li>3. Multiplication tables up to <math>10 \times 10</math></li> <li>4. Multiplication and division of numbers up to 3 digits by a 1-digit number</li> <li>5. Odd and even numbers</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Number notation and place values up to 100 000</li> <li>2. Approximation and estimation</li> <li>3. Factors and multiples</li> <li>4. Multiplication of numbers                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• up to 4 digits by a 1-digit number</li> <li>• up to 3 digits by a 2-digit number</li> </ul> </li> <li>5. Division of numbers up to 4 digits by a 1-digit number and by 10</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Number notation and place values up to 10 million</li> <li>2. Approximation and estimation</li> <li>3. Multiplication and division of numbers up to 4 digits by a 2-digit whole number</li> <li>4. Order of operations</li> </ol>	
<b>NUMBERS: FRACTIONS</b>					
	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Equal parts of a whole</li> <li>2. Idea of simple fractions</li> <li>3. Comparing and ordering like fractions</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Equivalent fractions</li> <li>2. Comparing and ordering unlike fractions</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Addition and subtraction                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• like fractions</li> <li>• related fractions</li> </ul> </li> <li>2. Product of a proper fraction and a whole number</li> <li>3. Mixed numbers and improper fractions</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Addition and subtraction of                             <ul style="list-style-type: none"> <li>• mixed numbers,</li> <li>• unlike fractions</li> </ul> </li> <li>2. Product of fractions</li> <li>3. Concept of fraction as division</li> <li>4. Division of a proper fraction by a whole number</li> </ol>	
<b>NUMBERS: DECIMALS</b>					
				<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Multiplication up to 2 decimal places by a 2-digit whole number</li> <li>2. Multiplication and division up to 3 decimal places by tens, hundreds, thousands</li> </ol>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Number notation and place values up to 3 decimal places</li> <li>2. Comparing and ordering</li> <li>3. Addition and subtraction up to 2 decimal places</li> <li>4. Multiplication and division up to 2 decimal places by 1-digit whole number</li> <li>5. Conversion between decimals and fractions</li> <li>6. Approximation and estimation 10</li> </ol>
<b>NUMBERS: AVERAGE/RATE/SPEED</b>					

### Libri di testo

I libri di testo di Singapore costruiscono una profonda comprensione dei concetti matematici attraverso problemi a più passaggi e illustrazioni concrete che dimostrano come i concetti matematici astratti vengono utilizzati per risolvere i problemi da diverse prospettive.

- presentazione chiara e diretta dei concetti
  - numerose serie di problemi (routinari e non routinari)
  - spiegazioni matematiche che iniziano con esempi fisici o rappresentazioni e solo in seguito si sviluppano fino a concetti più astratti
  - utilizzano le immagini per sviluppare euristiche particolarmente utili per risolvere problemi anche complessi
-

## Istruzione guidata e sistematica



**Esplorazione**

*Fallimento produttivo  
(Kapur, 2008; 2016)*

**Istruzione  
guidata**

*Teoria del carico  
cognitivo  
(Sweller, 2011)*

**ISTRUZIONE SISTEMATICA** (Fuchs et al., 2021)

- *Rivedere ed integrare i contenuti precedentemente appresi durante l'intervento*
- *Utilizzare numeri accessibili durante l'introduzione di nuovi concetti e procedure*
- *Sequenziare l'istruzione in modo incrementale*
- *Fornire supporti visivi e verbali*
- *Fornire feedback immediato:*

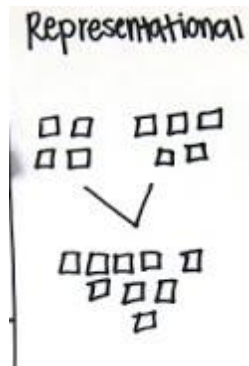
## Concrete to Pictorial to Abstract (CPA) Approach



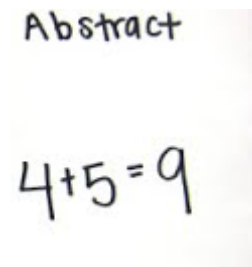
strumenti manipolativi che consentivano agli studenti di vedere, manipolare e comprendere il concetto



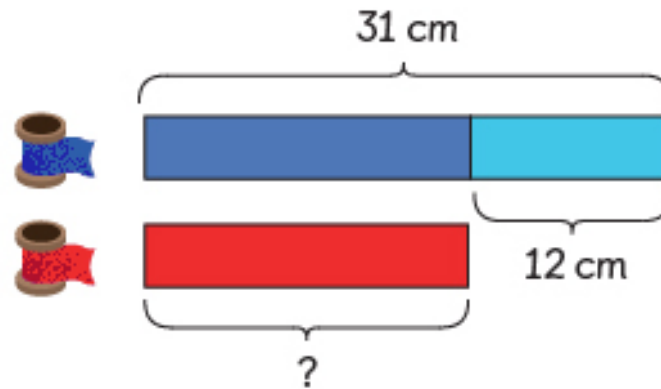
rappresentare visivamente un concetto esprimendo il pensiero su carta



utilizzare i simboli per risolvere problemi



### Il Bar Model (o Model drawing o Model Method)



Il bar method è una rappresentazione visiva e concreta delle informazioni basate sul testo. La struttura del disegno del modello mostra:

- il collegamento tra le espressioni aritmetiche e le informazioni basate sul testo
- consente ad ogni informazione basata su testo di essere riportata e quindi manipolata

### Il Bar Model (o Model drawing o Model Method)

- Obiettivo: aiutare gli studenti a risolvere problemi sfidanti senza algebra (Kho, 1987, 2008).
- Usando questo approccio, gli studenti disegnano rappresentazioni visive delle quantità e delle incognite indicate nel testo del problema in modo da visualizzare più chiaramente la struttura del problema e quindi risolverlo.
- Metodo è insegnato in maniera strutturata, a partire da problemi semplici dei primi anni della scuola primaria per terminare con problemi più difficili che coinvolgono frazioni, proporzioni e tassi di interesse negli ultimi anni della scuola primaria (Wong, 2009).
- 3 modalità di rappresentazione (non necessariamente nell'ordine)





Il model method non è un algoritmo. Utilizzando tale modello, l'impulso degli studenti a calcolare è notevolmente ridotto in quanto sono tenuti ad elaborare le informazioni del testo per rappresentarle graficamente, sia in termini quantitativi che qualitativi (Wong, 2009).

Il model method si basa infatti su due aspetti:

- **quantitativi**, rettangoli di lunghezze diverse vengono utilizzati per rappresentare differenti quantità, maggiore è il numero, più lungo sarà il rettangolo;
- **qualitativi**, relazione parte-intero dei numeri, possibilità di rappresentare un numero come la somma delle parti che lo compongono.

Sia problemi aritmetici che algebrici

---

Classificazione delle tipologie di problemi solitamente presentati attraverso il bar model:

- a) parte-intero;
  - b) confronto
  - c) moltiplicazione e divisione
-

## Parte-Intero (K3)

**Problema della crociera:** Sabato, 1050 persone sono andate in crociera. Domenica sono andate in crociera 1608 persone. Quante persone sono andate in crociera nei 2 giorni?

**Problema dell'orchidea:** Al giardino dell'Orchidea c'erano 2659 visitatori. 447 di loro erano adulti e il resto erano bambini. Quanti bambini hanno visitato il giardino dell'Orchidea?

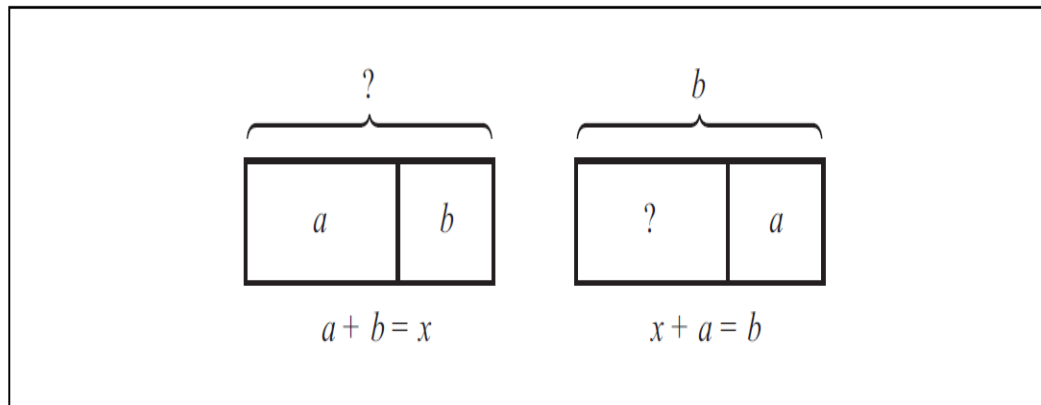


Figure 1. Part-whole models: Arithmetic model (at left) and algebraic model (at right).

## Confronto (K4)

*Problema degli iscritti:* La Dunearn Primary School ha 280 alunni. La Sunshine Primary School ha 89 alunni in più della Dunearn Primary. L'Excellent Primary ha 62 alunni in più della Dunearn Primary. Quanti alunni ci sono in tutto?

*Problema degli animali:* Una mucca pesa 150 kg in più rispetto a un cane. Una capra pesa 130 kg in meno della mucca. Complessivamente i tre animali pesano 410 kg. Qual è il peso della mucca?

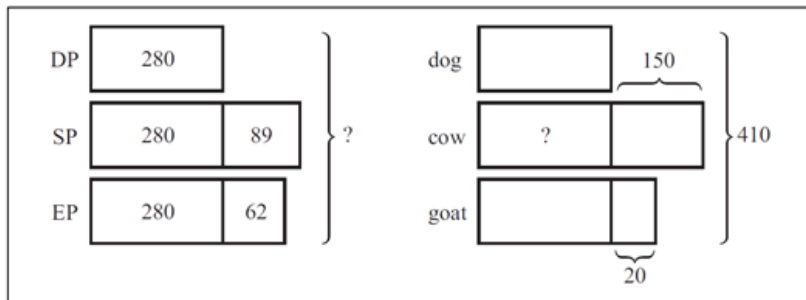


Figure 3. Comparison model used to represent the Enrollment Problem (at left) and the Animal Problem (at right).

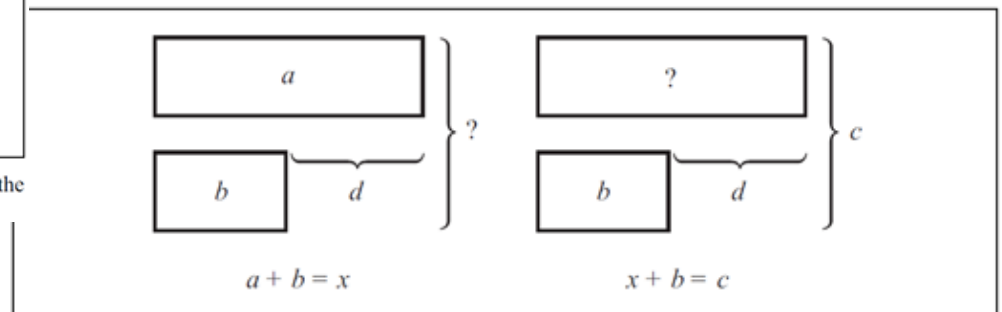


Figure 2. Comparison models: Arithmetic model (at left) and algebraic model (at right).

## Moltiplicazione e divisione

Bala ha scattato 24 foto. David ha scattato 3 volte più foto di Bala. Quante foto hanno scattato i due ragazzi in tutto? (Collars, Koay, Lee & Tan, 2003, p. 84)

Mary e John hanno in tutto \$ 48. John ha tre volte più denaro di Mary. Quanti soldi ha Mary? (Collars, Koay, Lee, Ong, & Tan, 2008, p. 33).

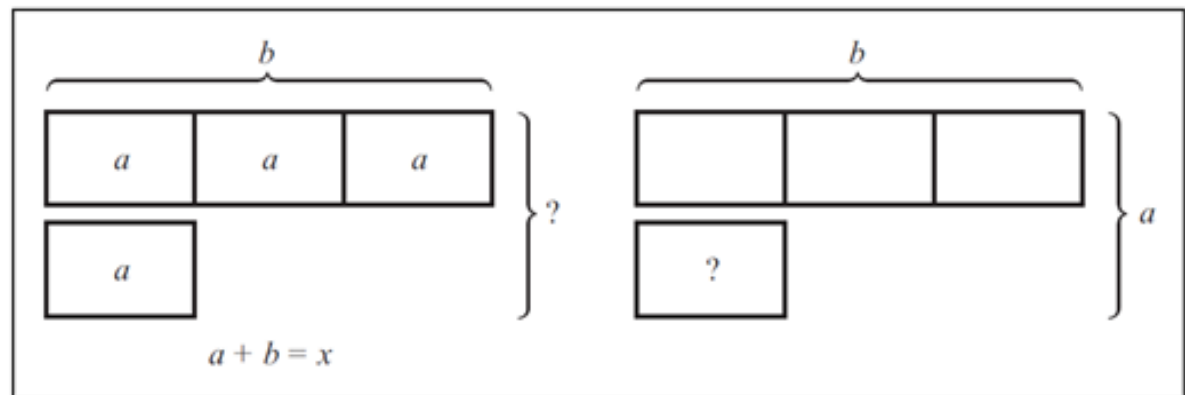


Figure 4. Multiplication and division models for arithmetic word problem (at left) and algebraic word problem (at right).

## **IL PROGRAMMA EIS: ENATTIVO, ICONICO, SIMBOLICO**

---